

Graficación

CCOM-259

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla

Facultad de Ciencias de la Computación

Daniel Alejandro Valdés Amaro, Ph.D

**Objetivo: El alumno
conocerá y aplicará los
algoritmos y técnicas de
graficado en
2D**

Transformaciones en dos dimensiones

Transformaciones

- En general, una transformación en 2D es una función o mapeo que cuando se le aplica a un punto en 2D, $P(x,y)$, lo transforma o mapea en otro punto 2D, $P(x',y')$.
- Así, una transformación en 2D transforma un conjunto de puntos originales O , en un conjunto de puntos Q .

- Sea T :

$$T(x, y) = (x', y')$$

$$P' = T(P)$$

(4-1)

Transformaciones Euclidianas

- Son aquellas que preservan las medidas de los largos y ángulos de las figuras.
- No modifican la forma o la geometría del objeto, esto es que las líneas se transforman en líneas, los planos en planos, los círculos en círculos y las elipses en elipses.
- Sólo la orientación y la posición de los objetos cambia.
- Tenemos dentro de este tipo de transformaciones a la traslación y a la rotación.

Transformaciones afines

- Las transformaciones afines son generalizaciones de las transformaciones Euclidianas.
- Bajo las transformaciones afines, las líneas se transforman en líneas, pero los círculos se convierten en elipses. Esto es porque no se preservan ni el largo ni el ángulo de los objetos transformados.
- Las distancias sólo se preservan entre puntos en la misma línea o en líneas paralelas (colineales).
- La escala y el inclinación pertenece a este tipo de transformaciones.

Transformaciones
básicas: traslación,
rotación y escala

Translación 2D

- La **translación** sobre un punto consiste en agregar un desplazamiento a sus coordenadas para generar las coordenadas de una nueva posición.
- Para trasladar a una nueva posición añadimos las distancias de traslación t_x y t_y a las coordenadas originales (x,y) :

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

(4-2)

Traslación 2D

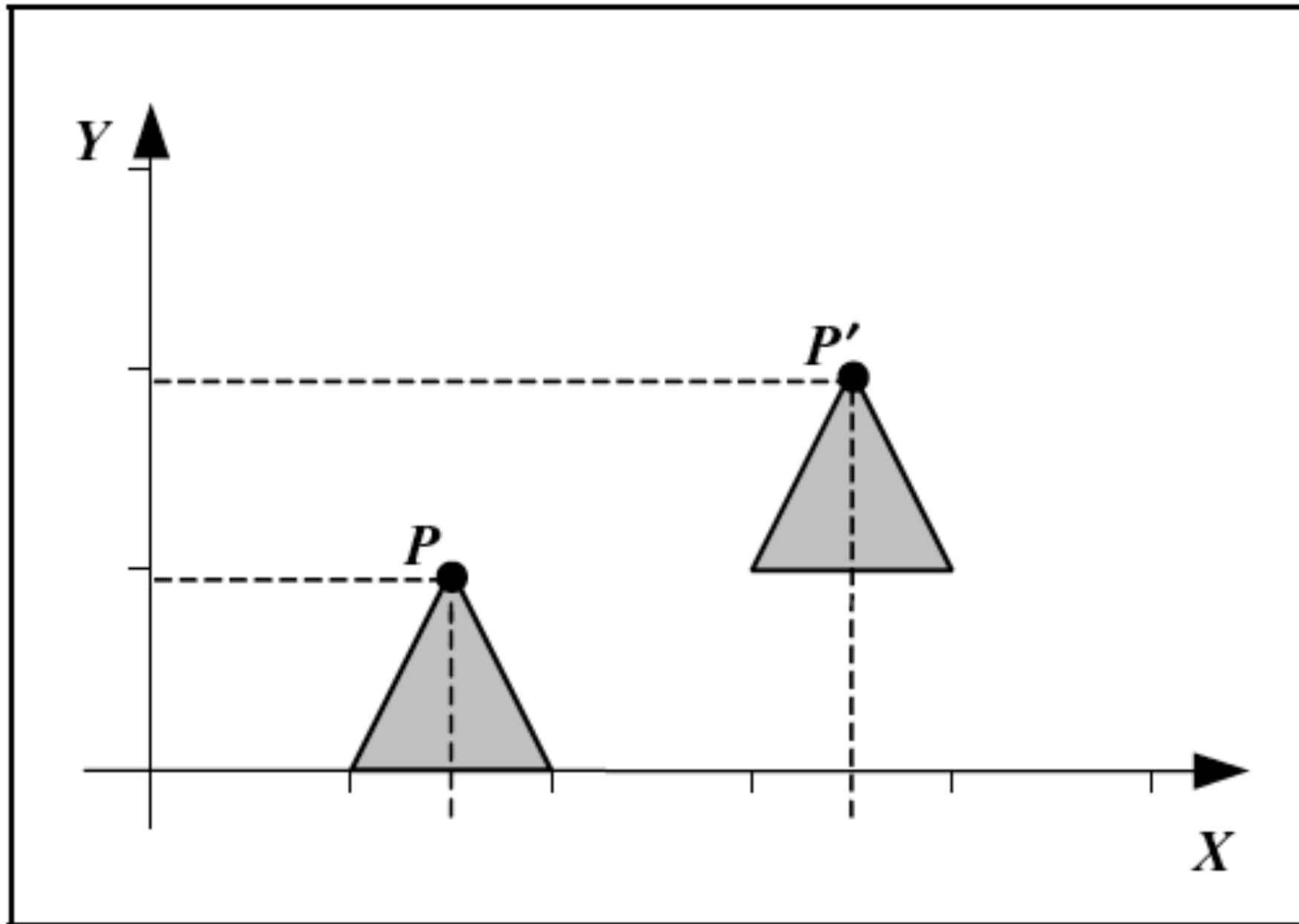
- Al par de distancias de traslación (t_x, t_y) se le conoce como **vector de traslación** o **de desplazamiento**.
- Podemos expresar la operación anterior como una ecuación de matrices utilizando los siguientes vectores:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

y tenemos que:

$$P' = P + T \quad (4-4)$$

Translación 2D

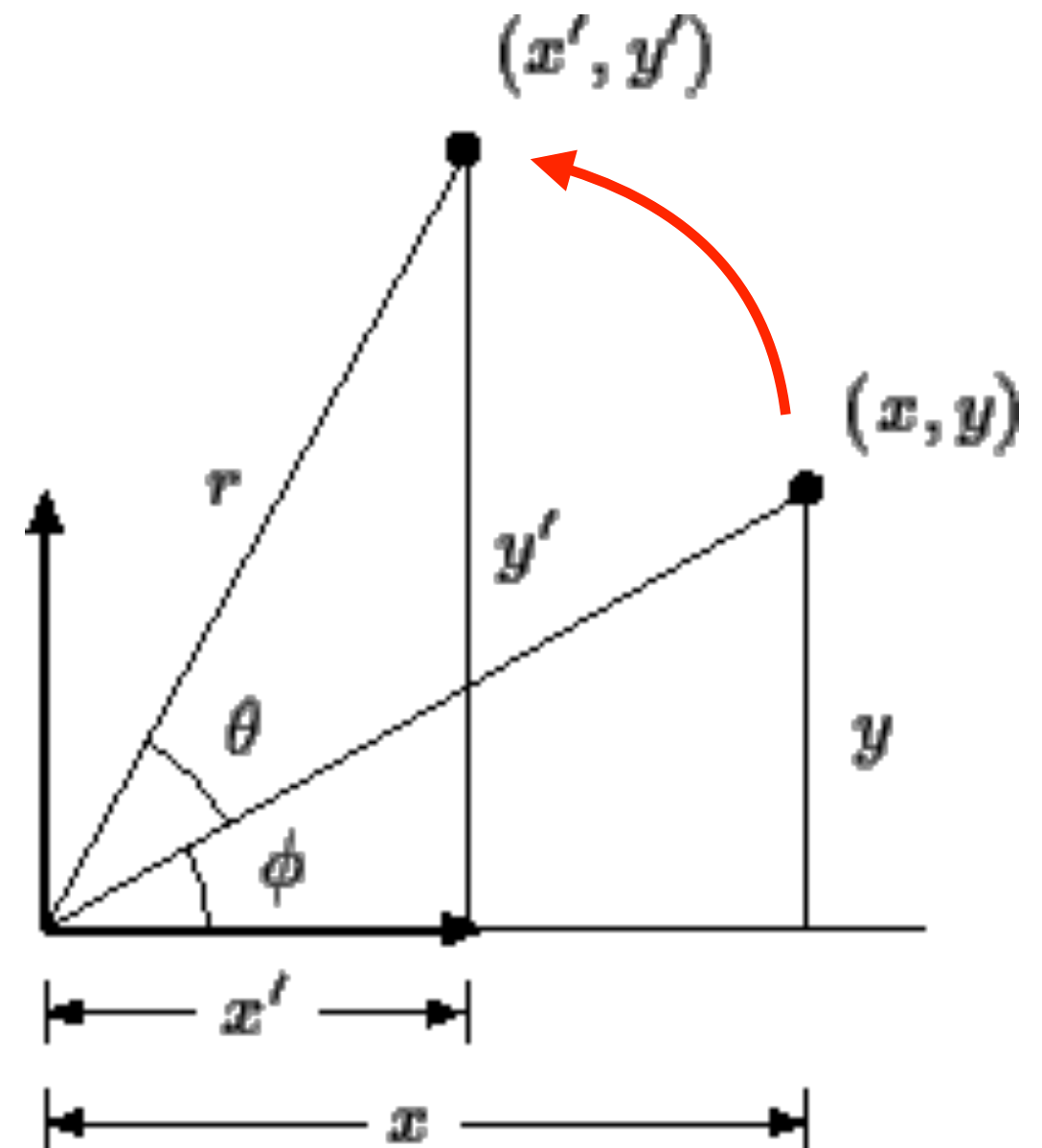


Rotación 2D

- La **rotación** sobre un punto consiste en especificar un eje y un ángulo de rotación, moviendo los puntos del objeto transformado a las nuevas posiciones rotando dichos puntos de acuerdo a dicho ángulo y eje.
- La rotación puede ser vista como un *reposicionamiento* del objeto a lo largo de una trayectoria circular en el plano xy .
- Los parámetros para la rotación son el ángulo de rotación θ y una posición (x_r, y_r) llamada punto de rotación o pivote.

Rotación 2D

- Dada la posición del punto P , con el punto pivote en el origen:
- r es la distancia constante del punto desde el origen, el ángulo ϕ es la posición angular original del punto desde la horizontal y θ es el ángulo de rotación.



Rotación 2D

- De lo anterior podemos obtener las ecuaciones de transformación para rotar un punto (x,y) utilizando el ángulo θ alrededor del origen:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

(4-5)

- Utilizando la representación vector columna, podemos reescribir las ecuaciones de rotación en forma matricial tal que:

$$P' = R \cdot P$$

(4-6)

Rotación 2D

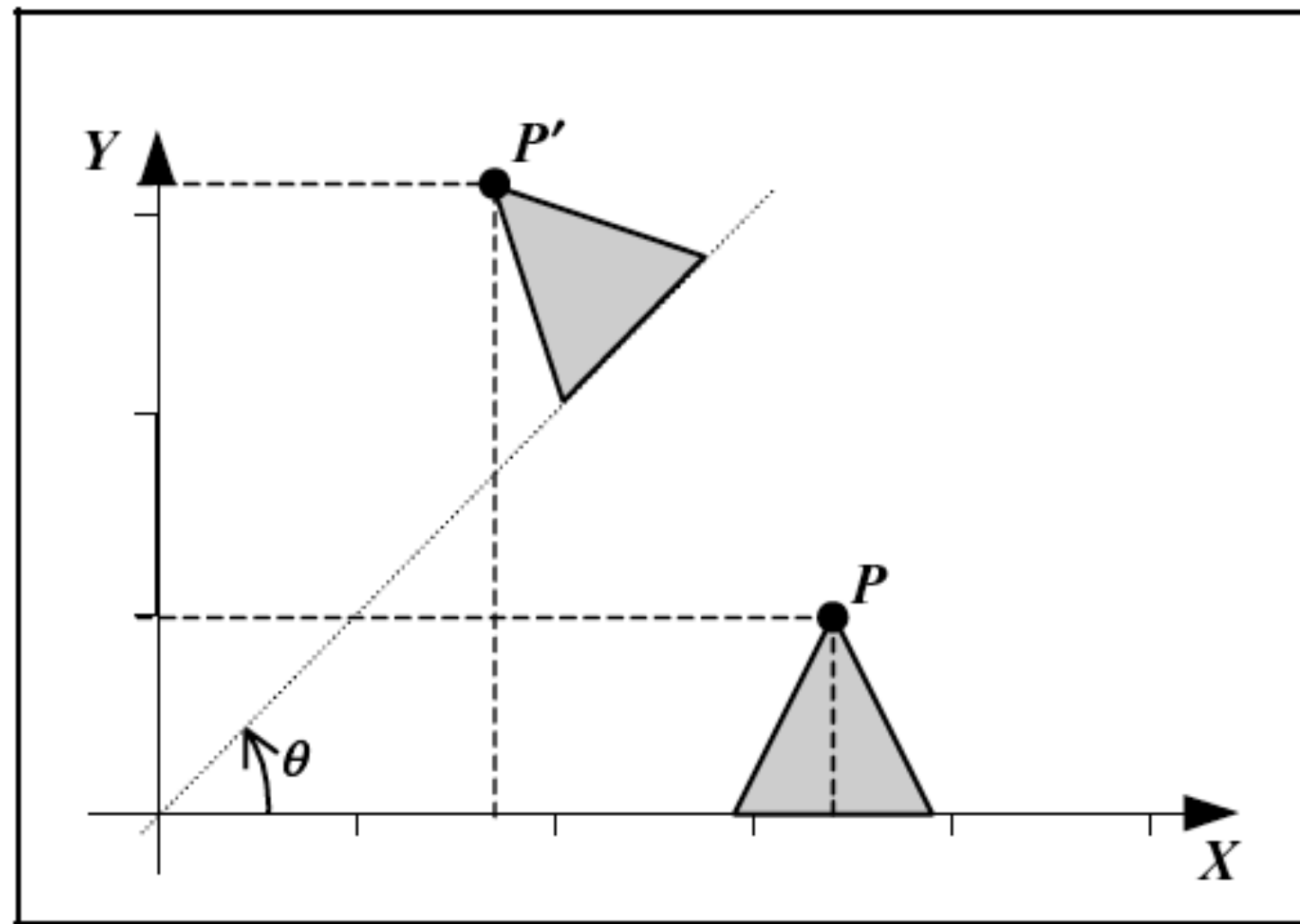
y la matriz de rotación es:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

- Las ecuaciones de rotación alrededor de una posición pivote arbitraria (x_r, y_r) son:

$$\begin{aligned} x' &= x_r + (x - x_r) \cos \theta - (y - y_r) \sin \theta \\ y' &= y_r + (x - x_r) \sin \theta + (y - y_r) \cos \theta \end{aligned} \quad (4-8)$$

Rotación 2D



- Tanto la rotación como la traslación son consideradas **transformaciones de cuerpo rígido (rigid-body transformations)** ya que mueven los objetos sin deformarlos. Es decir cada punto es rotado usando el mismo ángulo, o trasladado en la misma proporción.

Escala 2D

- Para alterar el tamaño de un objeto se aplica la transformación de escala.
- Para realizar esta operación le multiplicamos a las posiciones (x,y) del objeto los factores de escalamiento s_x y s_y para producir las coordenadas (x',y') :

$$x' = x \cdot s_x$$

$$y' = y \cdot s_y$$

(4-9)

- El factor s_x escala el objeto en la dirección x y s_y lo escala en la dirección y .

Escala 2D

- Las ecuaciones 4-9 pueden también ser escritas en forma matricial:

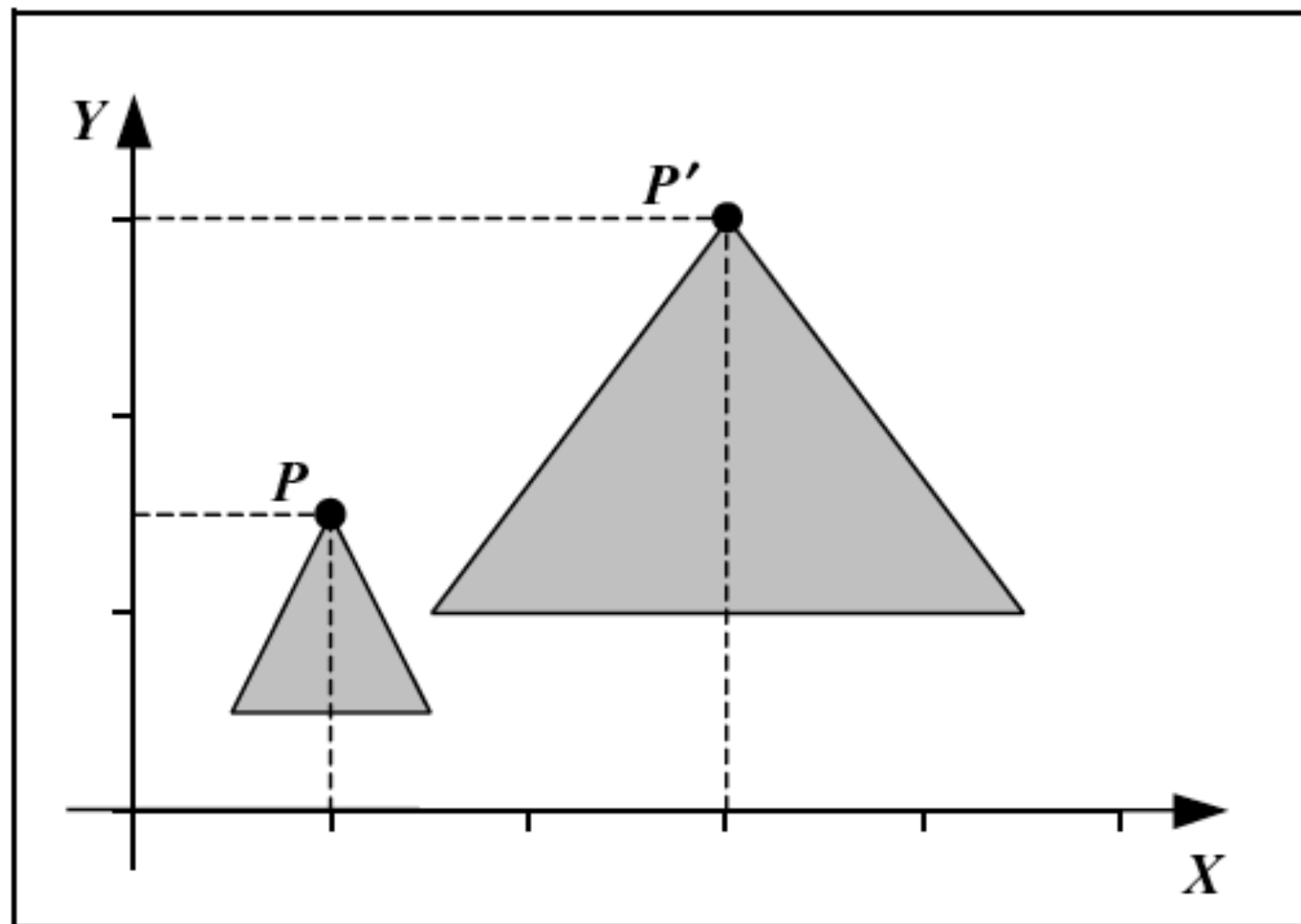
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

o

$$P' = S \cdot P \quad (4-11)$$

donde S es la matriz de 2 por 2 en la ecuación 4-10.

Escala 2D



- Para aumentar o reducir el tamaño de los objetos sólo tenemos que asignar valores positivos o negativos a s_x y s_y .

Escala 2D

- Cuando a s_x y s_y se les asigna el mismo valor se produce una **escala uniforme**, que mantiene las proporciones relativas del objeto.
- Es importante notar que los objetos escalados ocupando la ecuación 4-10, son también reposicionados. Factores de escala con valores absolutos menores a 1 mueven los objetos más cerca del origen, mientras que valores absolutos mayores a 1, lo alejan.

Escala 2D

- Lo anterior se puede controlar eligiendo una posición llamada **punto fijo**, cuyas coordenadas (x_r, y_r) se eligen en alguna posición del objeto, tal como el *centroide*.
- Así, los objetos cambian de tamaño escalando las distancias entre los puntos del objeto y el punto fijo.
- Para las coordenadas (x, y) , las nuevas coordenadas (x', y') se calculan con:

$$x' = x \cdot s_x + x_r(1 - s_x)$$

$$y' = y \cdot s_y + y_r(1 - s_y)$$

(4-12)

Coordenadas homogéneas

Forma de matriz general

- Las transformaciones básicas en 2D pueden ser expresadas en una forma de matriz general como:

$$P' = M_1 \cdot P + M_2 \quad (4-13)$$

- La matriz M_1 es un arreglo 2 x 2 que contiene factores multiplicativos, M_2 es una matriz columna de 2 elementos que contiene los términos de traslación.
- Para la traslación, M_1 es la matriz identidad y para la rotación y escala, contiene los términos de traslación asociados con el punto pivote o el punto fijo de escala.
- La ecuación 4-13 puede ser utilizada para combinar transformaciones.

Coordenadas homogéneas

- Modificando la manera en que representamos puntos en 2D, podemos convertir todas las transformaciones geométricas que consideramos en Graficación para que **sean operaciones de matrices y vectores.**
- Así, los términos de rotación y traslación para una transformación en 2 dimensiones, pueden ser combinados en **una sola matriz si expandemos las representaciones a matrices de 3x3.**
- Usamos una tercera columna de la matriz de transformación para los términos de traslación, **de tal modo que todas las ecuaciones pueden ser expresadas como multiplicaciones matriciales.**

Coordenadas homogéneas

- Pero para lograr lo anterior, también necesitamos expandir la representación de las coordenadas 2D, así que añadimos una tercera dimensión a los puntos en 2D.
- Los puntos se representan por la tripleta $P^h = (w \cdot x, w \cdot y, w) = (x_w, y_w, w)$ llamada **coordenadas homogéneas**.
- El parámetro w , también llamado **parámetro homogéneo** o **peso del punto**, es un valor diferente de 0, que actúa también como un factor de escala, tal que:

$$x = \frac{x_w}{w}, \quad y = \frac{y_w}{w} \quad (4-14)$$

Coordenadas homogéneas

- Podemos observar que existen un número infinito de representaciones homogéneas equivalentes. Esto es porque la representación homogénea es un mapeo uno a muchos, es decir pasamos de un *n-espacio* a un *(n+1)-espacio*.
- Dos puntos son iguales si son múltiplos el uno del otro, por ejemplo $P_1^h = [1 \ 3 \ 4]$ y $P_2^h = [2 \ 6 \ 8]$, ya que $P_2^h = 2P_1^h$.
- El punto (x_w, y_w, w) es el mismo que $(x/w, y/w, 1)$.

Coordenadas homogéneas

- Así, para homogeneizar cualquier coordenada, basta con que la posición bidimensional (x,y) , se **represente con coordenadas homogéneas como $(x,y,1)$** .
- Expresando posiciones con coordenadas homogéneas nos permite representar **todas las ecuaciones de transformaciones geométricas como multiplicaciones de matrices**, que es un método estándar usado en los sistemas de gráficos.

Transformaciones en CH

- Traslación:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-15)$$

$$P' = T(t_x, t_y) \cdot P \quad (4-16)$$

- Rotación:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

$$P' = R(\theta) \cdot P \quad (4-18)$$

Transformaciones en CH

- Escala:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P \quad (4-20)$$

Composición de transformaciones

Composición de transformaciones 2D

- Usando la representación de matrices podemos establecer una secuencia de transformaciones como una **matriz de transformaciones compuestas** mediante el cálculo del producto de transformaciones individuales.
- El hecho de formar productos de matrices de transformación se le conoce como **concatenación** o **composición** de matrices.

Composición de transformaciones 2D

- Dado que las coordenadas se representan con una matriz columna homogénea, necesitamos premultiplicar la matriz columna por las matrices que representan la secuencia de transformaciones.
- Además, ya que muchas posiciones en la escena se transforman por la misma secuencia, es más eficiente primero multiplicar las matrices de transformación para formar una sola matriz compuesta.

Composición de transformaciones 2D

- Así, si quisiéramos aplicar dos transformaciones a la posición de un punto P , la nueva ubicación se puede calcular como:

$$P' = M_2 \cdot M_1 \cdot P = M \cdot P \quad (4-21)$$

- La coordenada se transforma utilizando la matriz compuesta M , en lugar de aplicar las transformaciones individuales M_1 y luego M_2 .

Traslaciones 2D compuestas

- Si dos vectores de traslación (t_{1x}, t_{1y}) y (t_{2x}, t_{2y}) se aplican a una coordenada de un punto P , la posición final transformada P' se calcula como:

$$\begin{aligned} P' &= T(t_{2x}, t_{2y}) \cdot [T(t_{1x}, t_{1y}) \cdot P] \\ &= [T(t_{2x}, t_{2y}) \cdot T(t_{1x}, t_{1y})] \cdot P \end{aligned} \quad (4-22)$$

donde P y P' se representan como vectores columna homogéneos de 3 elementos.

- La matriz de transformación compuesta para esta secuencia de traslaciones es:

Traslaciones 2D compuestas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2x} \\ 0 & 1 & t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} \\ 0 & 1 & t_{1y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1x} + t_{2x} \\ 0 & 1 & t_{1y} + t_{2y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-23)

o

$$T(t_{2x}, t_{2y}) \cdot T(t_{1x}, t_{1y}) = T(t_{1x} + t_{2x}, t_{1y} + t_{2y}) \quad \text{color: blue (4-24)}$$

- Lo anterior demuestra que dos traslaciones sucesivas son aditivas.

Rotaciones 2D compuestas

- Dos rotaciones sucesivas aplicadas a un punto P producen la posición transformada:

$$\begin{aligned} P' &= R(\theta_2) \cdot [R(\theta_1) \cdot P] \\ &= [R(\theta_2) \cdot R(\theta_1)] \cdot P \end{aligned} \quad (4-25)$$

- Multiplicando las dos matrices de rotación, podemos verificar que dos rotaciones sucesivas son aditivas:

$$R(\theta_2) \cdot R(\theta_1) = R(\theta_2 + \theta_1) \quad (4-26)$$

- Así, las coordenadas finales rotadas de un punto pueden ser calculadas con la matriz de rotación compuesta:

$$P' = R(\theta_1 + \theta_2) \cdot P \quad (4-27)$$

Escala 2D compuesta

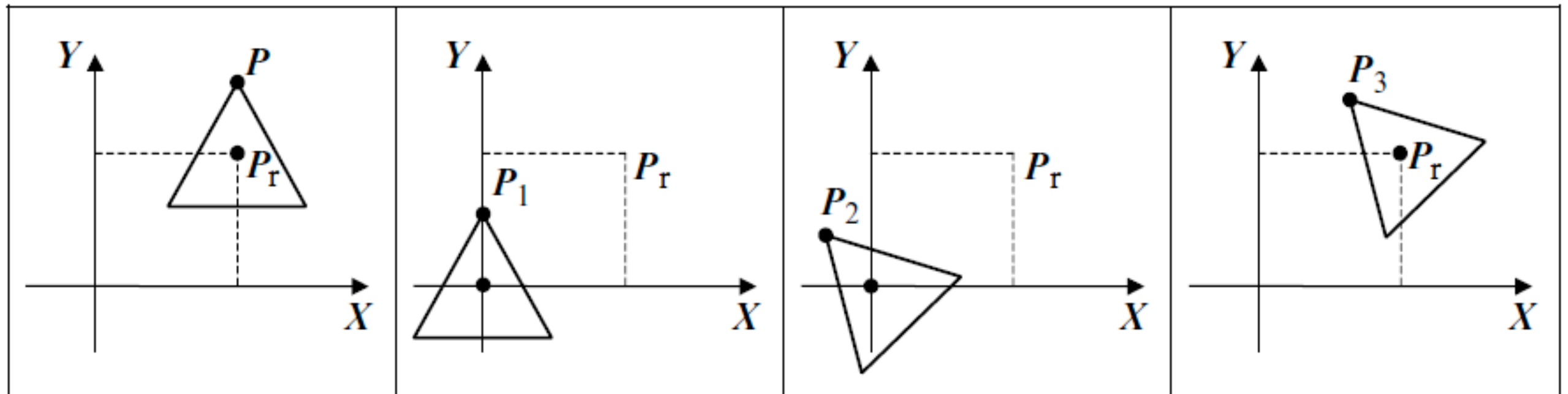
- Concatenando matrices de transformación para dos operaciones sucesivas de escalamiento en 2D produce la siguiente matriz de escala compuesta:

$$\begin{bmatrix} s_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{1x} & 0 & 0 \\ 0 & s_{1y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{1x} \cdot s_{2x} & 1 & 0 \\ 0 & s_{1y} \cdot s_{2y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

o

$$S(s_{2x}, s_{2y}) \cdot S(s_{1x}, s_{1y}) = S(s_{1x} \cdot s_{2x}, s_{1y} \cdot s_{2y}) \quad (4-29)$$

Rotación 2D general con punto pivote



Rotación 2D general con punto pivote

- Cuando los sistemas gráficos proveen sólo una función de rotación con respecto al origen, podemos generar una rotación en 2D alrededor de cualquier otro punto pivote (x_r, y_r) realizando la siguiente secuencia de operaciones:
 1. Trasladar el objeto tal que el punto pivote se mueva al origen.
 2. Rotar el objeto alrededor del origen.
 3. Trasladar el objeto para que el punto pivote regrese a su posición original.

Rotación 2D general con punto pivote

- Así, la matriz de transformación compuesta para esta secuencia se obtiene con la concatenación:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & x_r(1 - \cos \theta) + y_r \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & y_r(1 - \cos \theta) - x_r \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-30)

Rotación 2D general con punto pivote

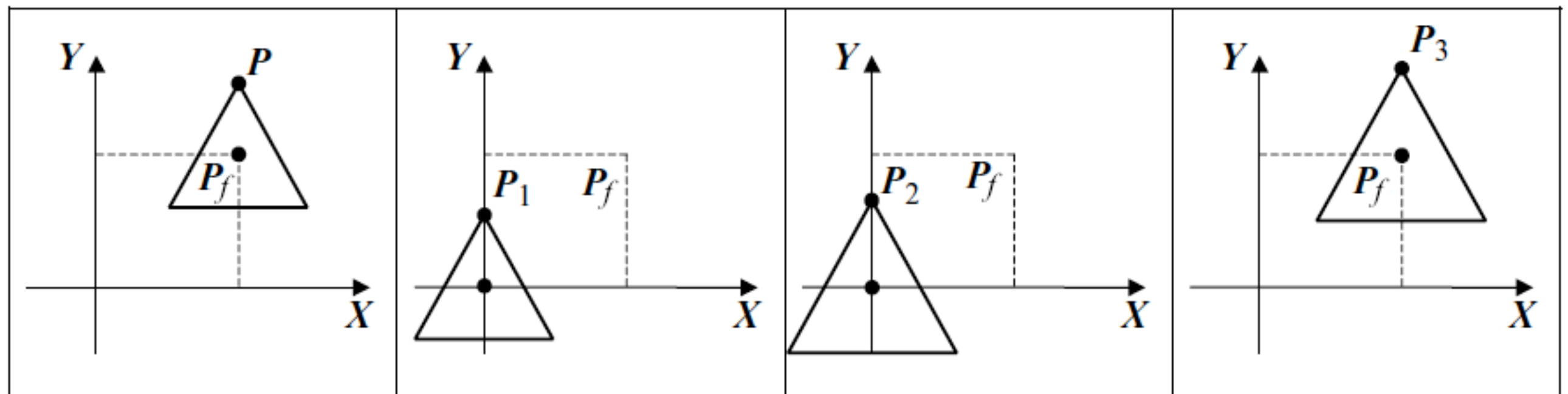
que puede ser expresada en la forma:

$$T(x_r, y_r) \cdot R(\theta) \cdot T(-x_r, -y_r) = R(x_r, y_r, \theta) \quad (4-31)$$

donde $T(-x_r, -y_r) = T^{-1}(x_r, y_r)$.

Escala 2D general con punto pivote

- Para el caso de la escala se sigue un procedimiento similar al anterior:



- Concatenando las matrices para estas tres operaciones produce la siguiente matriz:

Escala 2D general con punto pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

(4-32)

o

$$T(x_f, y_f) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_f, -y_f) = S(x_f, y_f, s_x, s_y)$$

(4-33)

Escala 2D general con punto pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-32)

o

$$T(x_f, y_f) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_f, -y_f) = S(x_f, y_f, s_x, s_y)$$

(4-33)

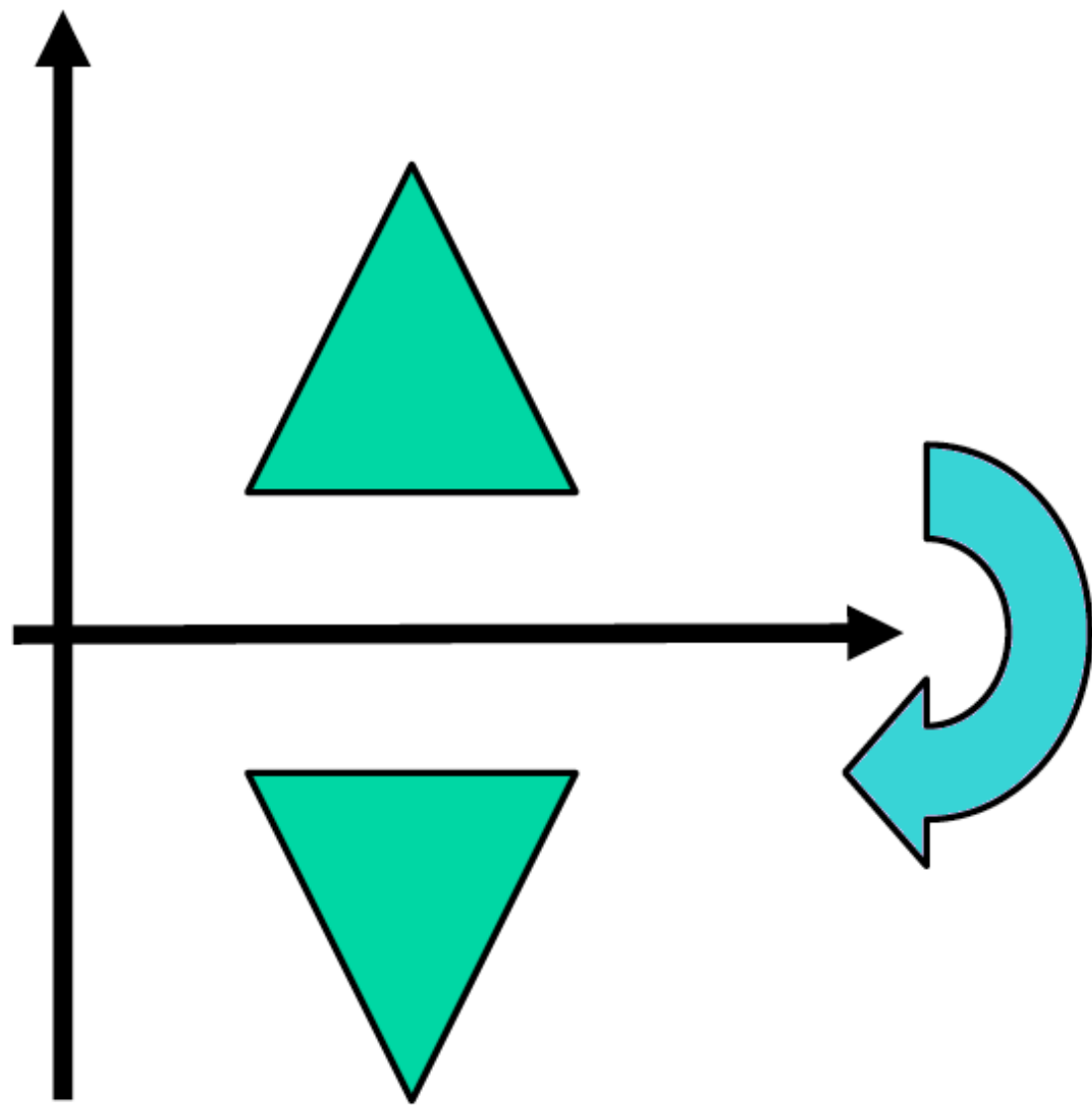
Transformaciones
complementarias:
reflexión e
inclinación

Reflexión

- A la transformación que produce una imagen en espejo de un objeto se le llama **reflexión**.
- La imagen resultante es generada con respecto al los ejes de reflexión mediante la rotación del objeto en 180° .
- Podemos escoger la reflexión en el plano xy o perpendicular al plano xy .

Reflexión

- La reflexión con respecto a la línea $y=0$ (eje x) se realiza mediante la matriz de transformación:

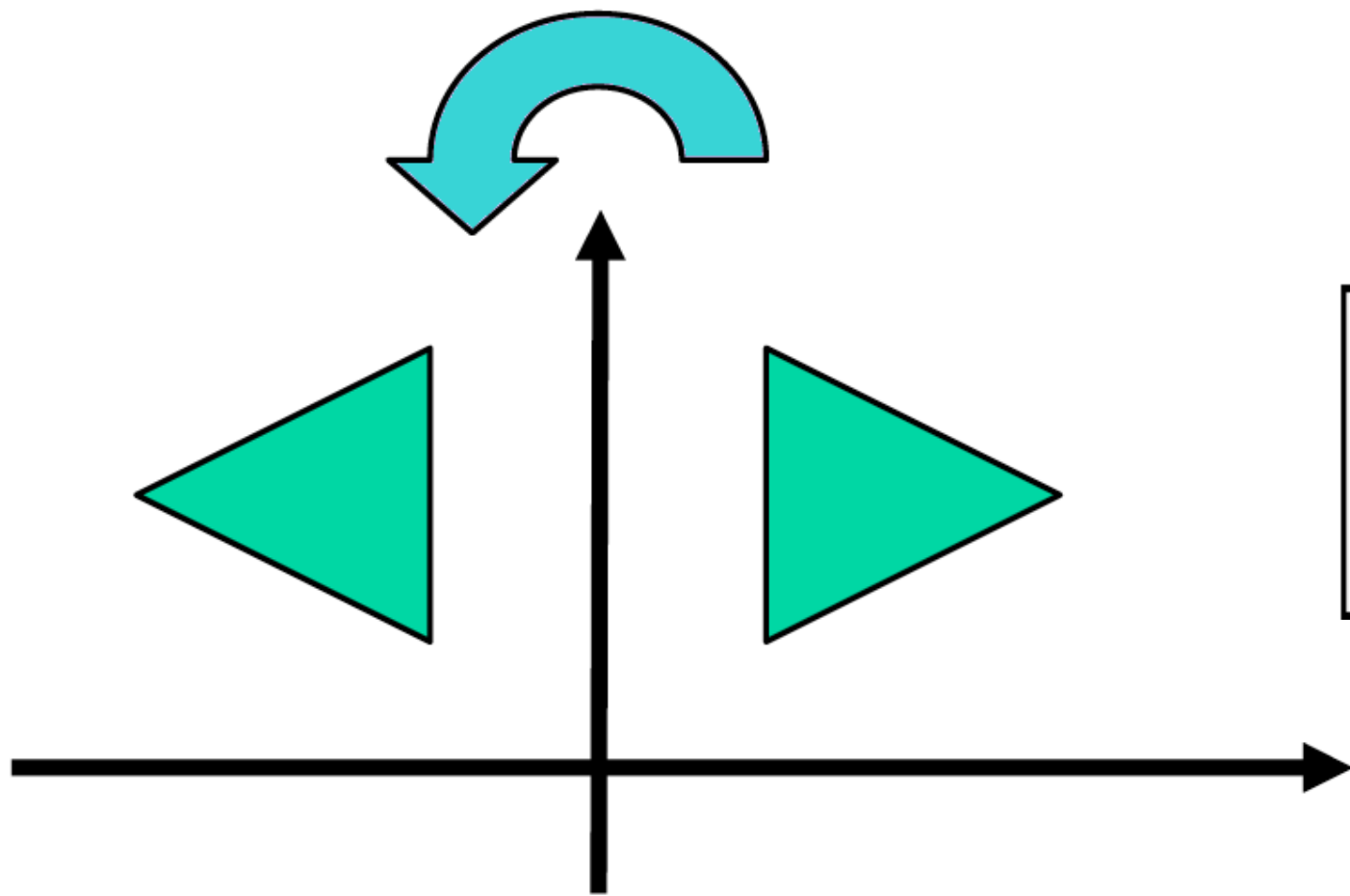


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-34)

Reflexión

- La reflexión con respecto a la línea $x=0$ (eje y) se realiza mediante la matriz de transformación:

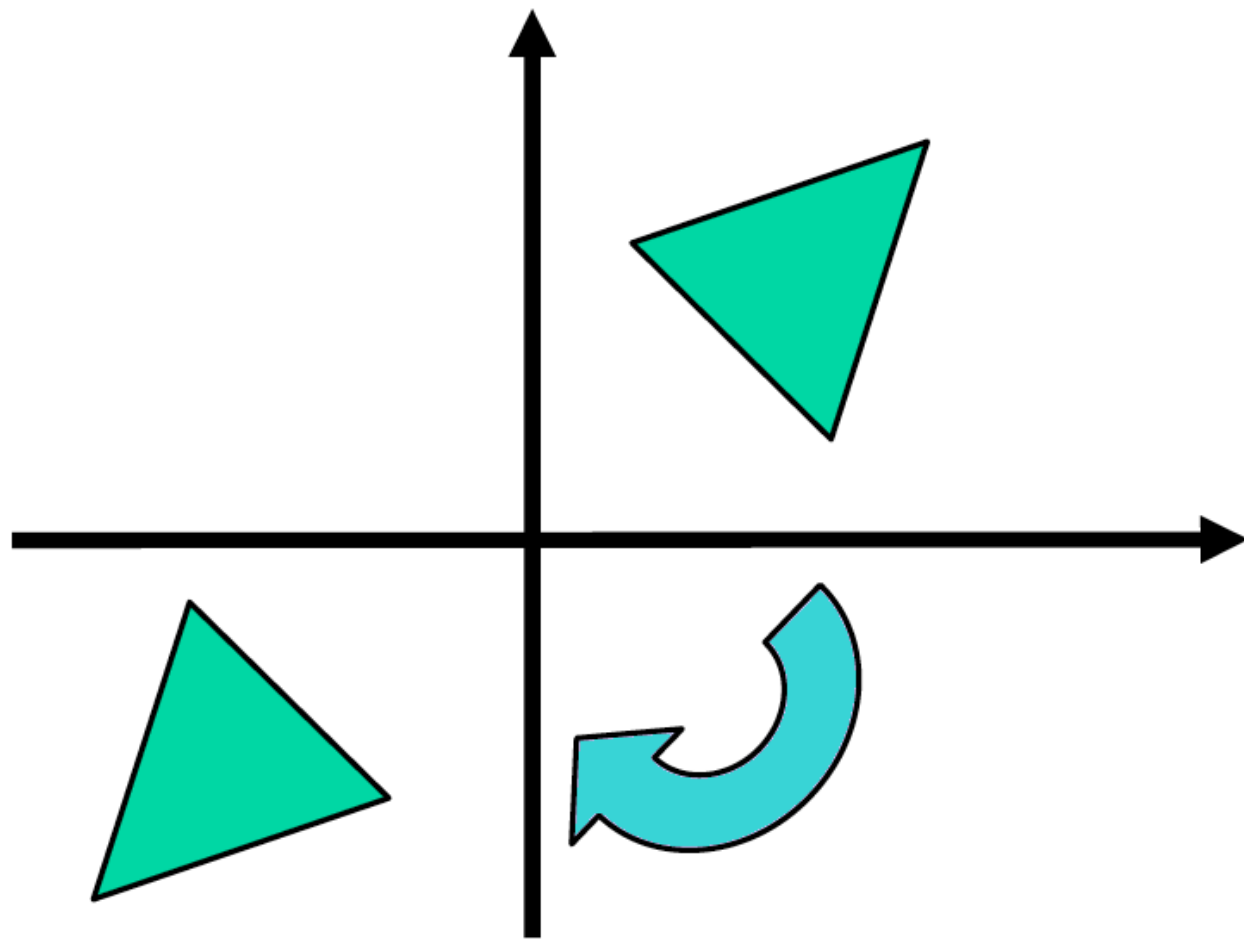


$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-35)

Reflexión

- La reflexión con respecto al origen se realiza mediante la matriz de transformación:

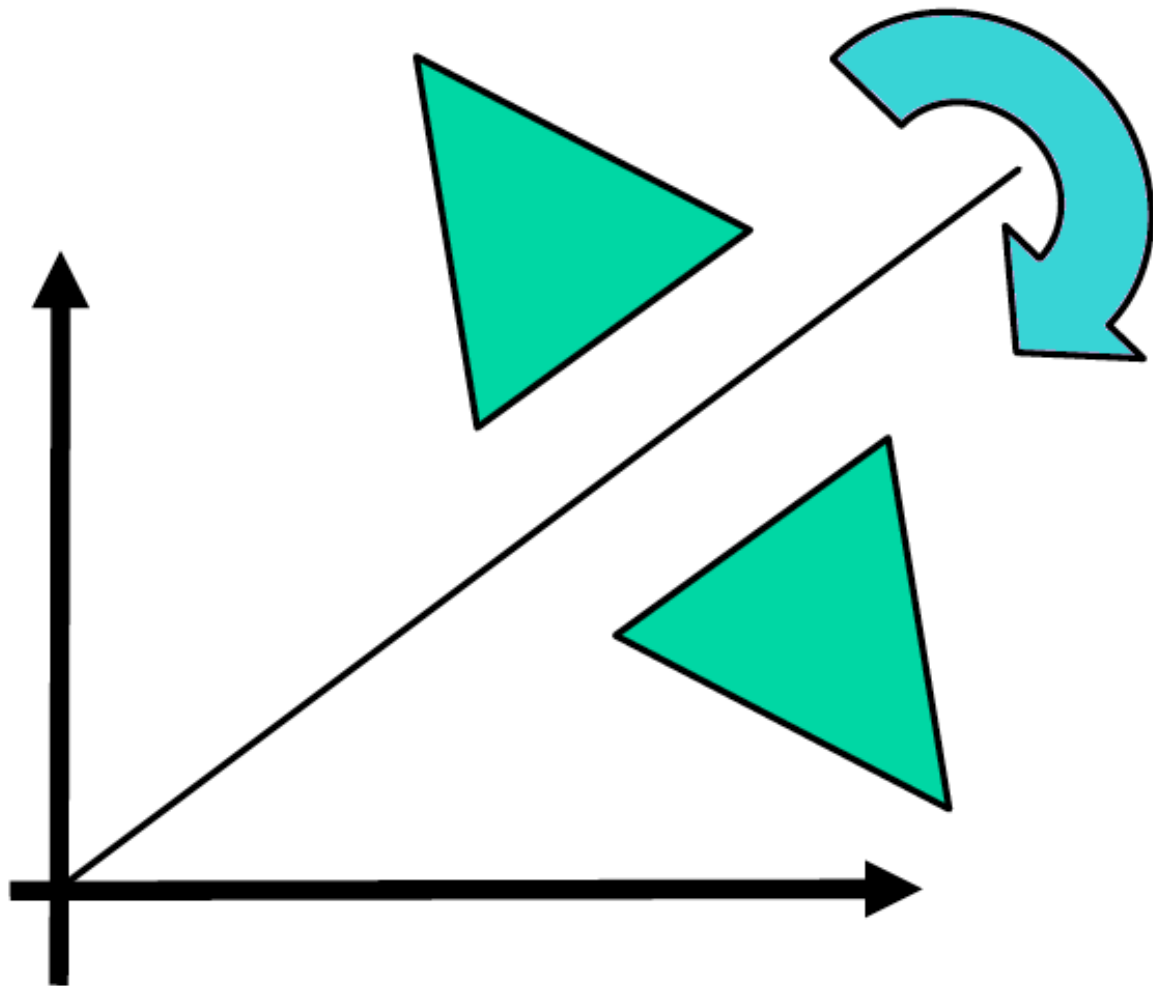


$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-36)

Reflexión

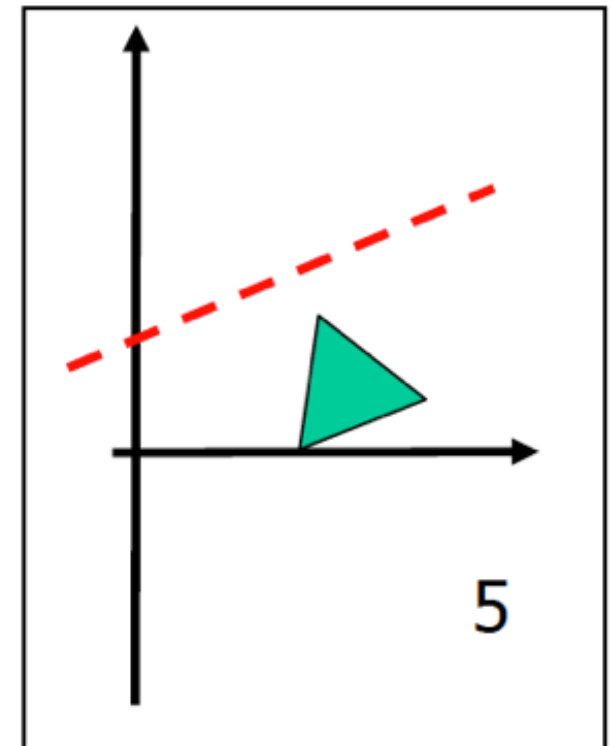
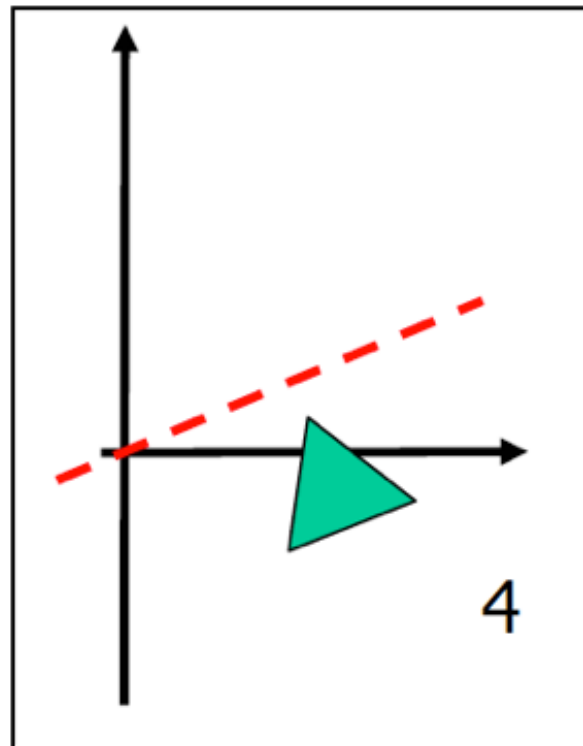
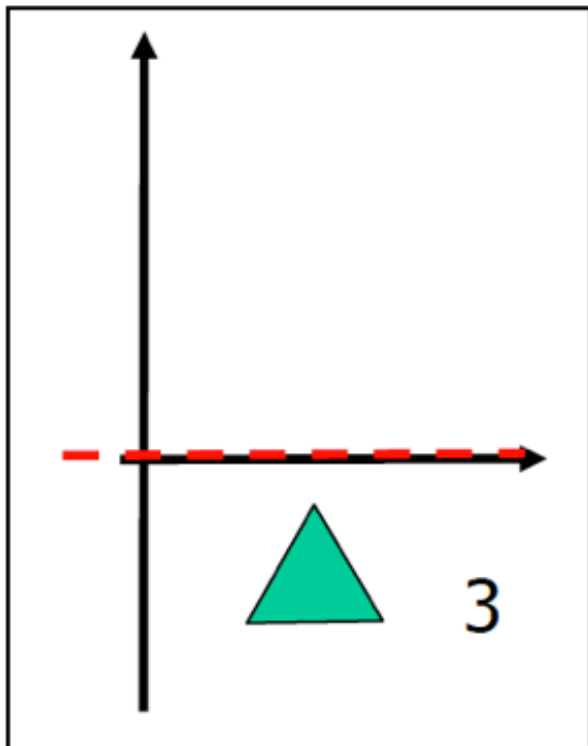
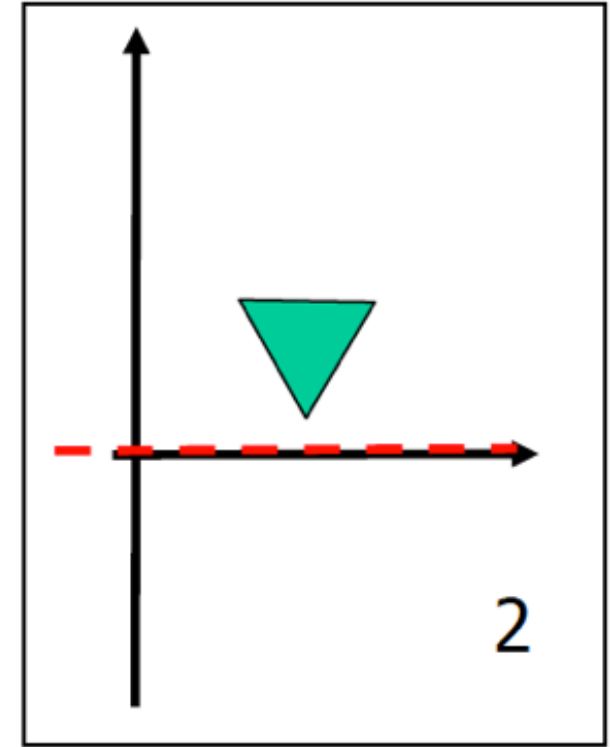
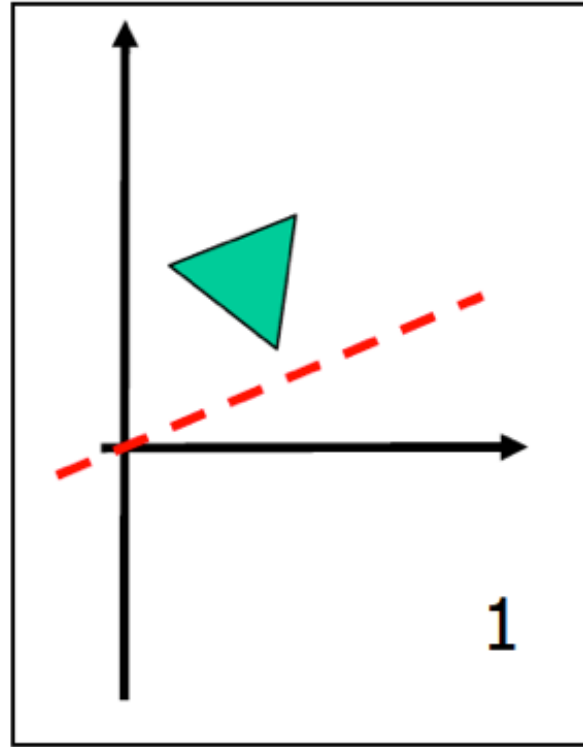
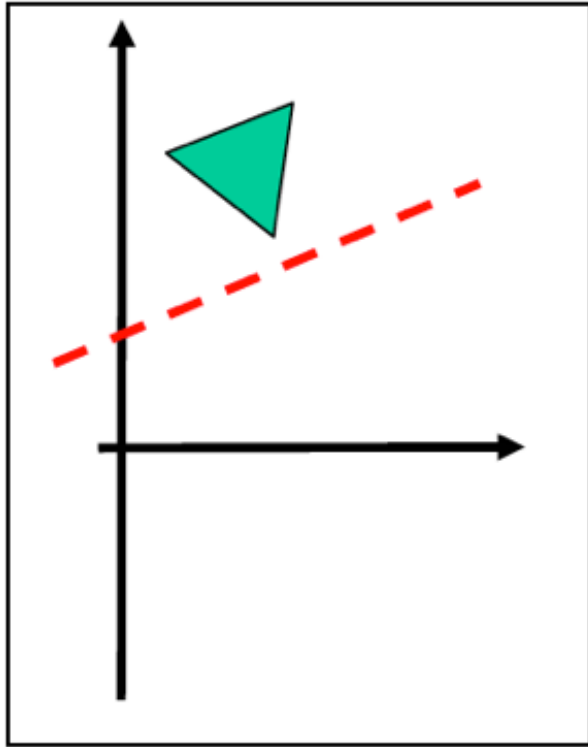
- La reflexión con respecto a la línea $x=y$ se realiza mediante la matriz de transformación:



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-37)

Reflexión general

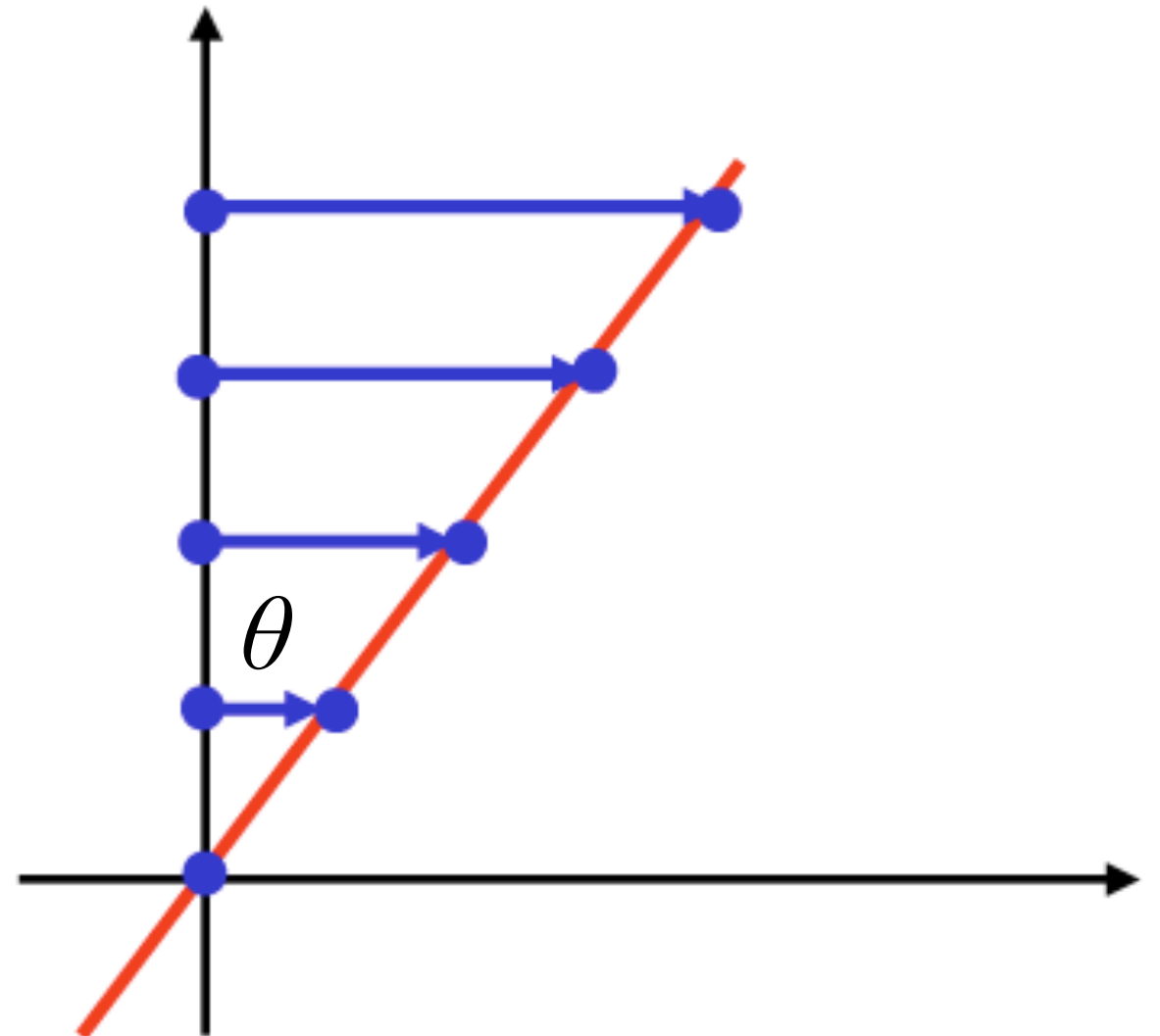


Reflexión general

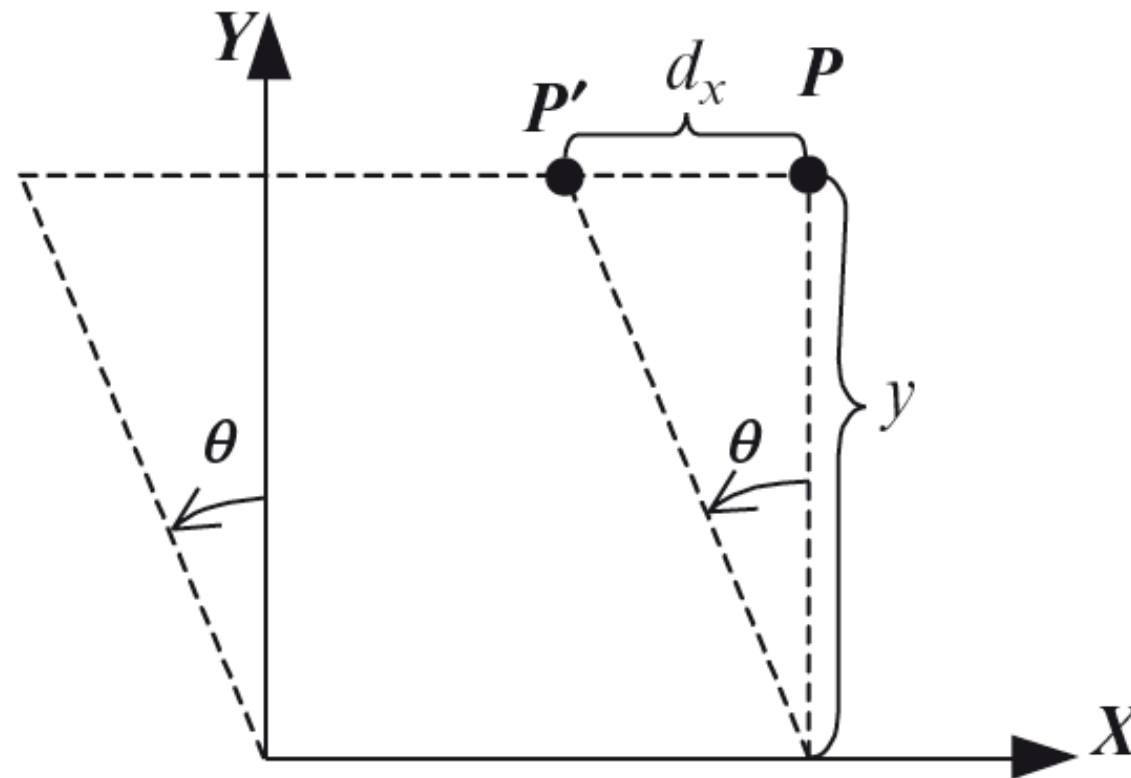
- Podemos además considerar una **reflexión general**, alrededor de cualquier línea $y = mx + b$ en el plano xy .
- Primero trasladamos la línea tal que pase por el origen, luego rotamos la línea sobre uno de los ejes coordenados y reflejamos con respecto a dicho eje. Finalmente restauramos la línea a su posición original con transformaciones de rotación y traslación inversas.

Inclinación

- En general, podemos considerar que la transformación de inclinación calcula el desplazamiento de los puntos en función de los valores de las coordenadas proporcionadas por un **ángulo de inclinación θ** .
- Existe dos tipos de inclinación, correspondientes a los ejes coordenados.



Inclinación en el eje-x



- La inclinación de un punto P con respecto al eje-x involucra modificar sólo sus coordenadas en x .
- El ángulo de inclinación se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj en forma positiva, y se define:

Inclinación en el eje-x

$$\tan \theta = \frac{d_x}{y} \quad (4-38)$$

$$\therefore d_x = y \cdot \tan \theta$$

por lo anterior:

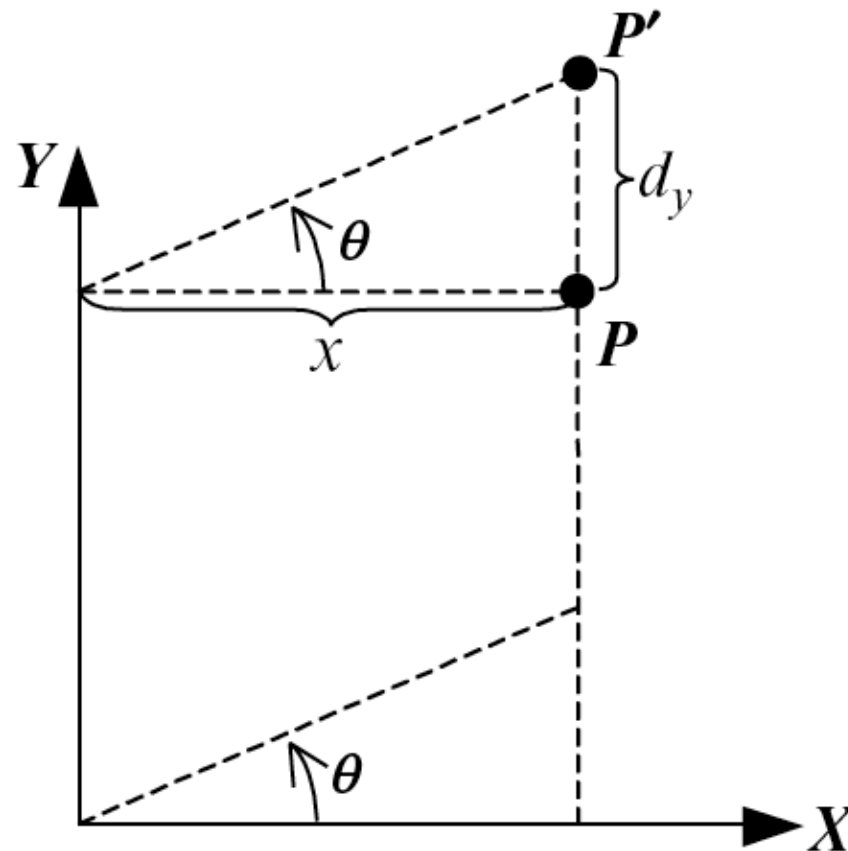
$$\begin{aligned} x' &= x - d_x = x - y \cdot \tan \theta \\ y' &= y \end{aligned} \quad (4-39)$$

- Expresando 4-42 en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

donde sh_x puede ser cualquier real, en este caso $\tan \theta$.

Inclinación en el eje-y



- La inclinación de un punto P con respecto al eje-y involucra modificar sólo sus coordenadas en y .
- El ángulo de inclinación se mide en el sentido contrario a las manecillas del reloj en forma positiva, y se define:

Inclinación en el eje-y

$$\tan \theta = \frac{d_y}{x} \quad (4-41)$$

$$\therefore d_y = x \cdot \tan \theta$$

por lo anterior:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y + d_y = y + x \cdot \tan \theta \end{aligned} \quad (4-42)$$

- Expresando 4-45 en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ sh_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-43)$$

donde sh_x puede ser cualquier real, en este caso $\tan \theta$.

Ejemplos

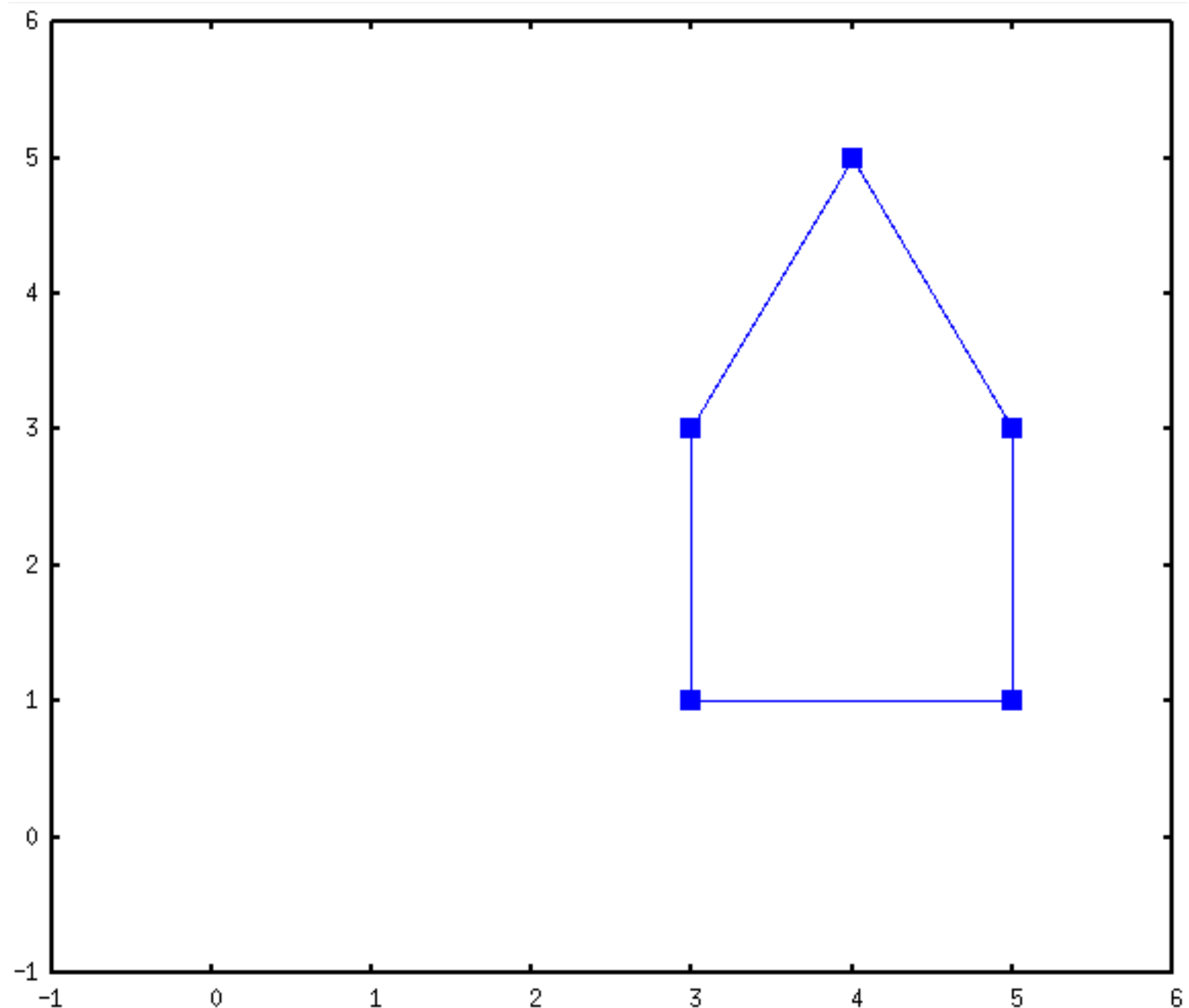
Ejemplo I

- Realizar las operaciones indicadas sobre la siguiente figura:

1. Rotación en 90°

2. Traslación en $(3, -1)$

3. Escala al doble



Ejemplo I: Rotación

- Evaluando la matriz de rotación en 90° se tiene:

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_1 = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

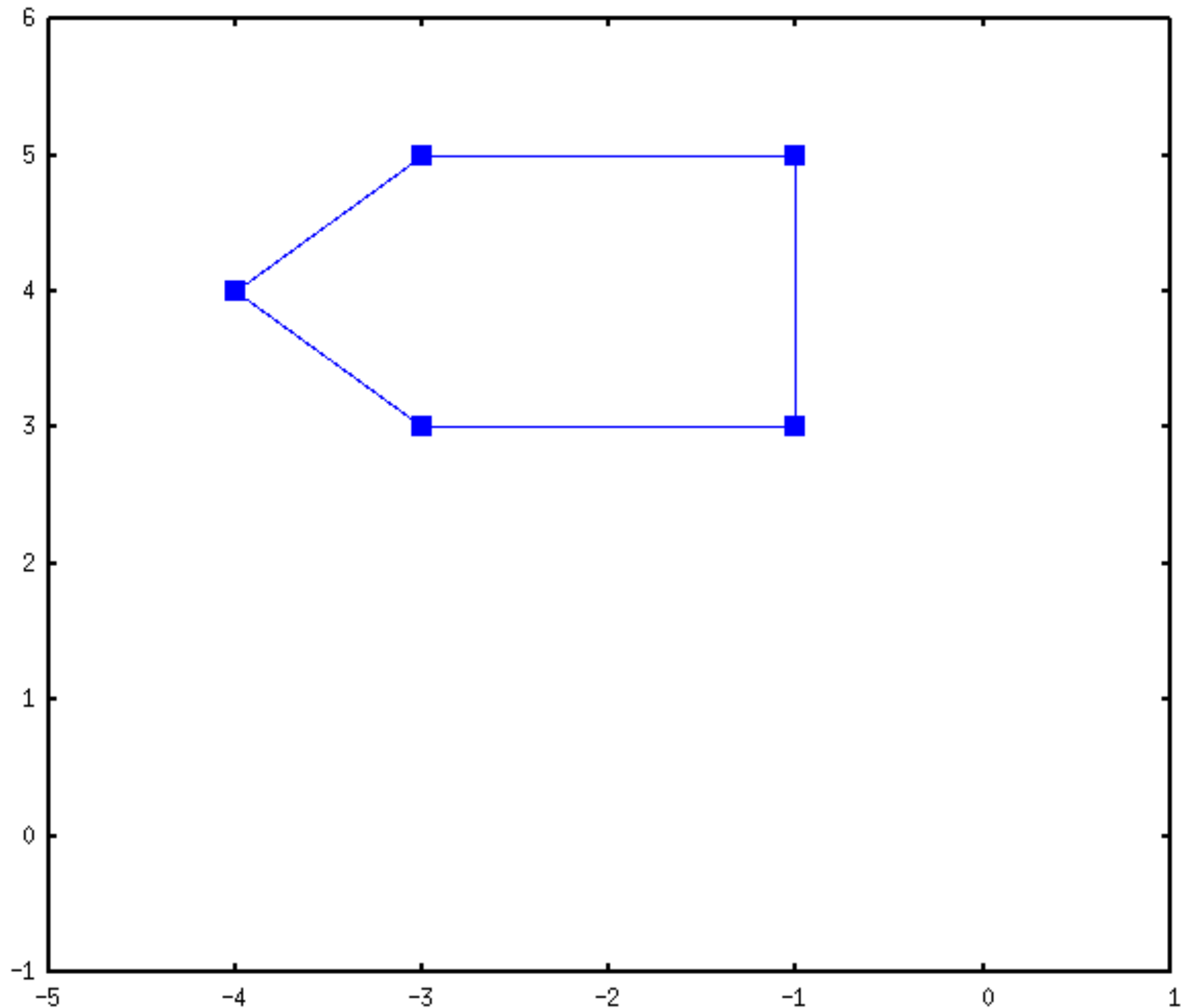
Ejemplo I: Rotación

$$P'_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_5 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo I: Rotación



Ejemplo 1: Traslación

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Aplicando al resultado anterior la matriz de traslación en $(-3,1)$:

$$P_1'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_2'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

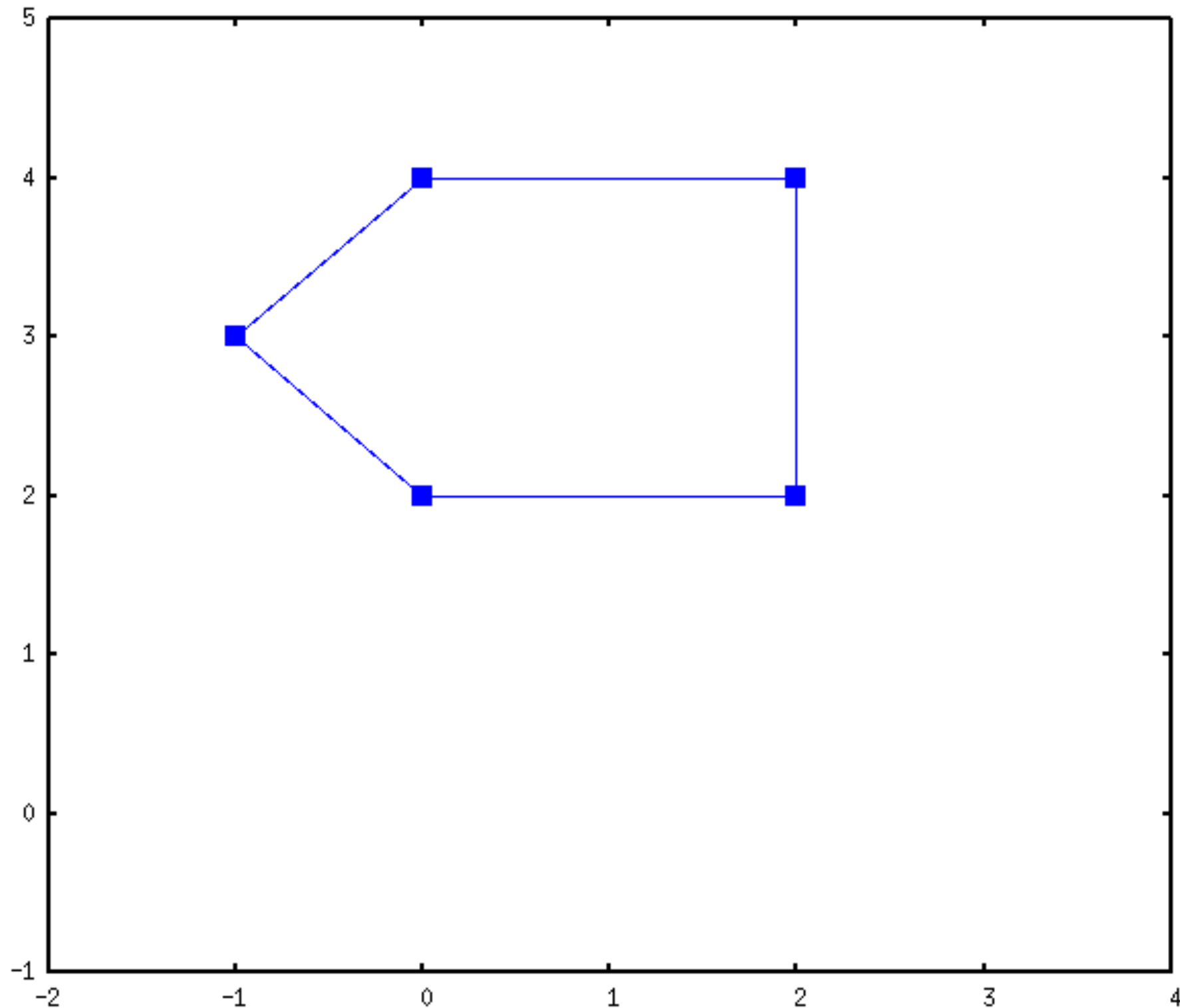
Ejemplo 1: Traslación

$$P_3'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_4'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_5'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo I: Traslación



Ejemplo I: Escala

- Finalmente aplicando la escala al doble se tiene:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo I: Escala

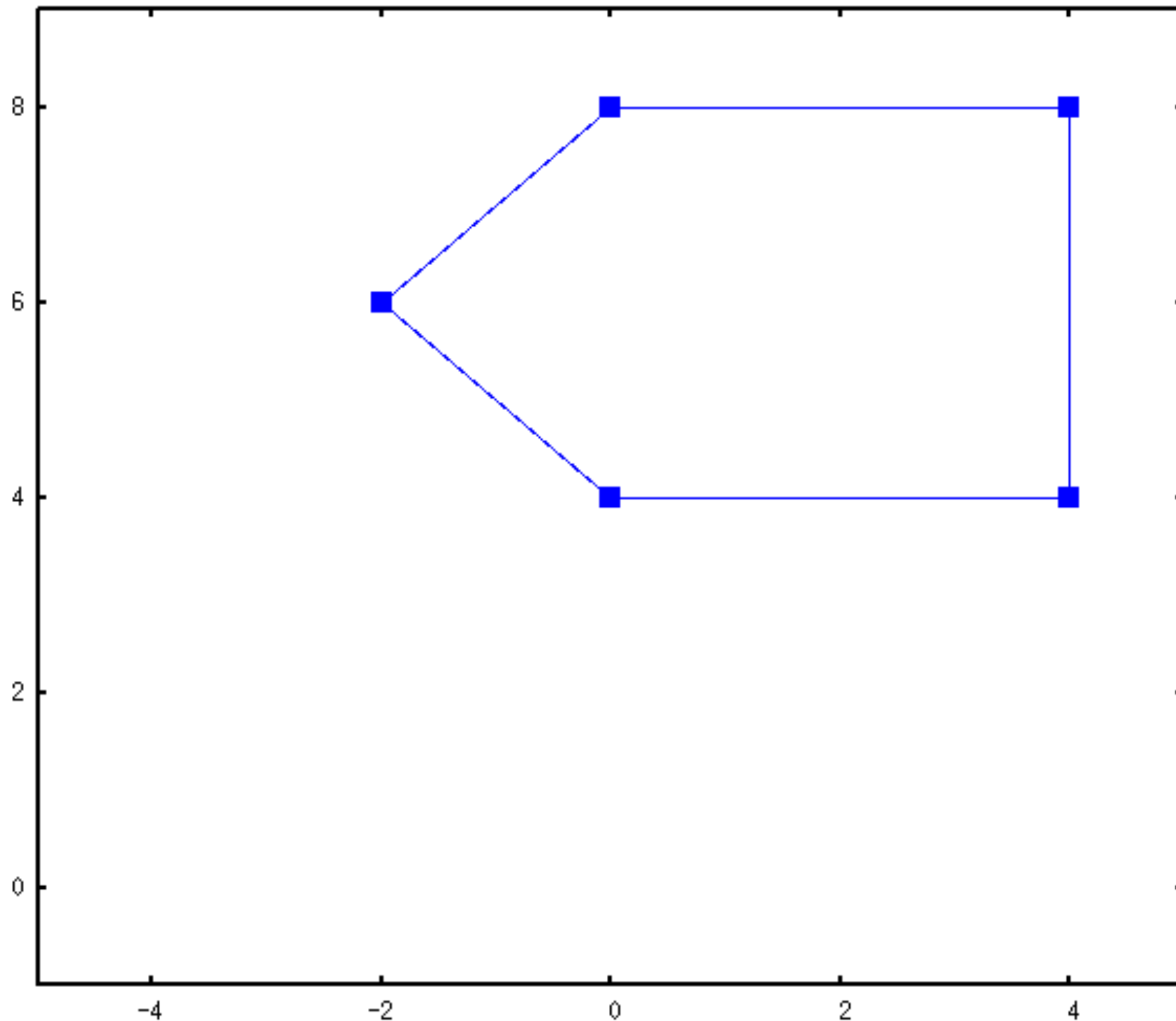
$$P_2''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_4''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_5''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo I: Escala



Ejemplo I: Composición

- Se verificarán ahora las operaciones anteriores realizando la composición de matrices.

$$C = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} S_x \cos(x) & -S_x \sin(x) & S_x T_x \\ S_y \sin(x) & S_y \cos(x) & S_y T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1: Composición

$$P'_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

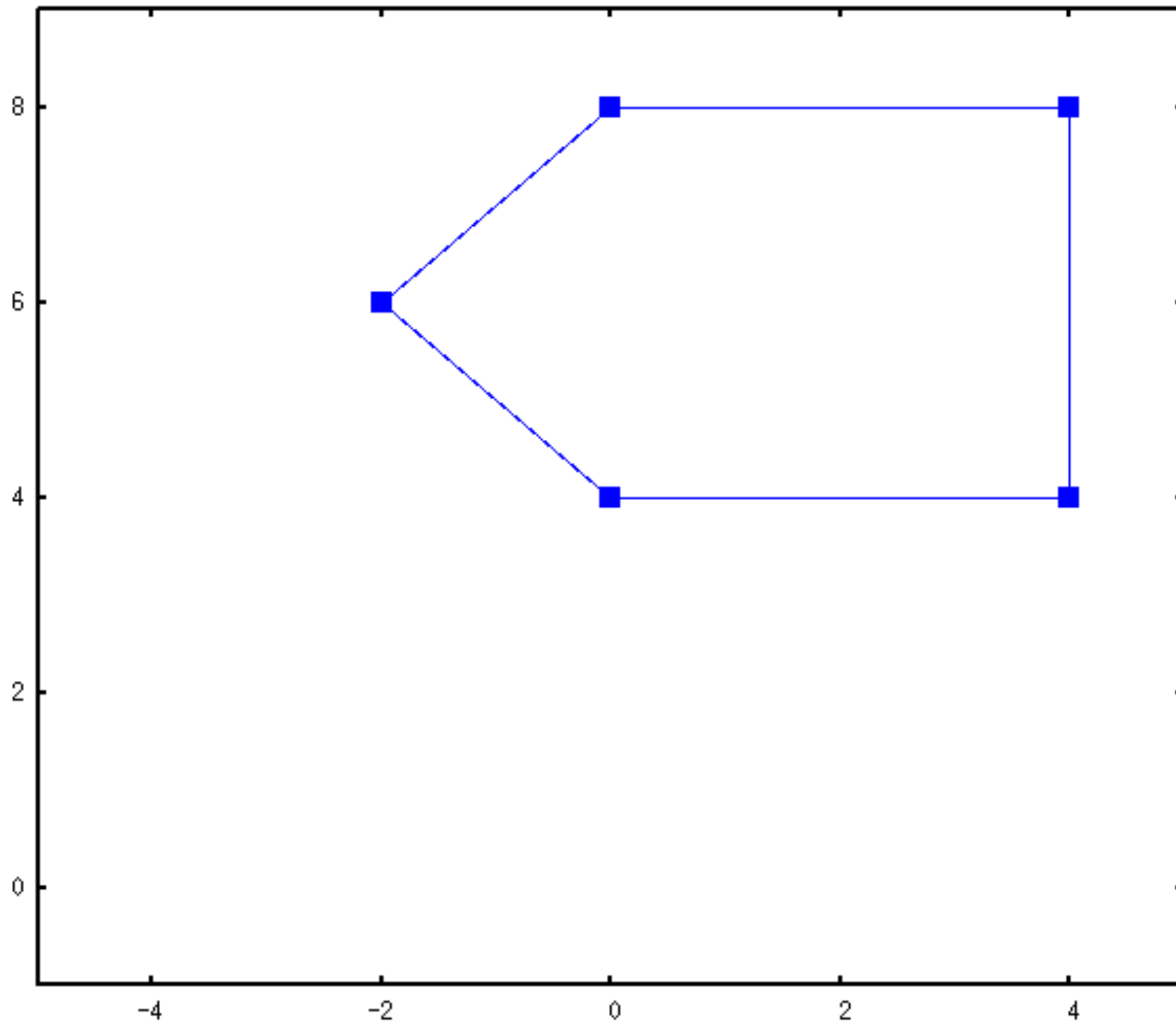
$$P'_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo I: Composición

$$P'_4 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_5 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo I: Composición



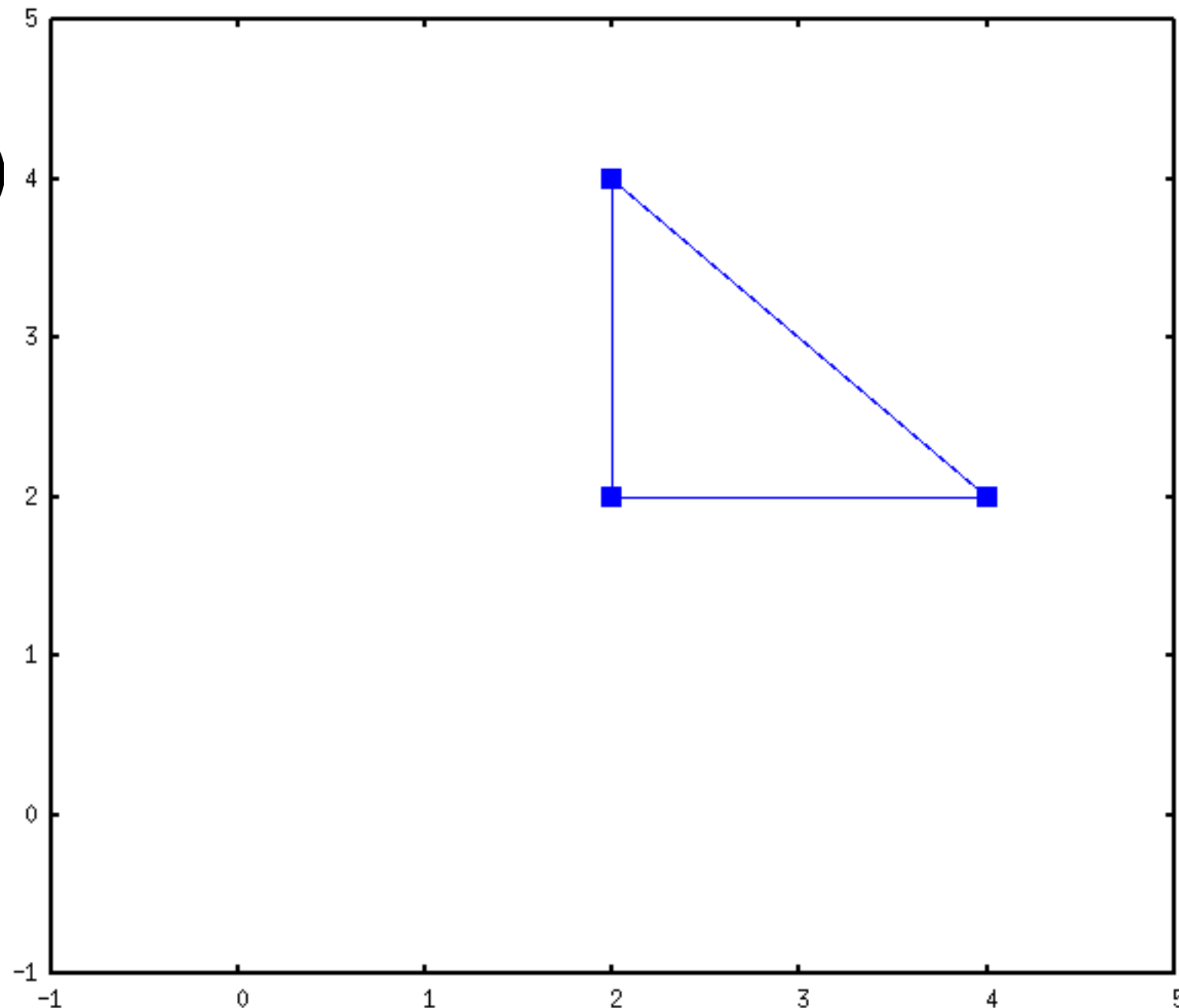
Ejercicio

- Realizar las operaciones indicadas sobre la siguiente figura:

1. Traslación en $(-1, -1)$

2. Rotación en -90°

3. Escala al doble



Ejercicio: Traslación

- Primero se aplica la traslación $(-1,-1)$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

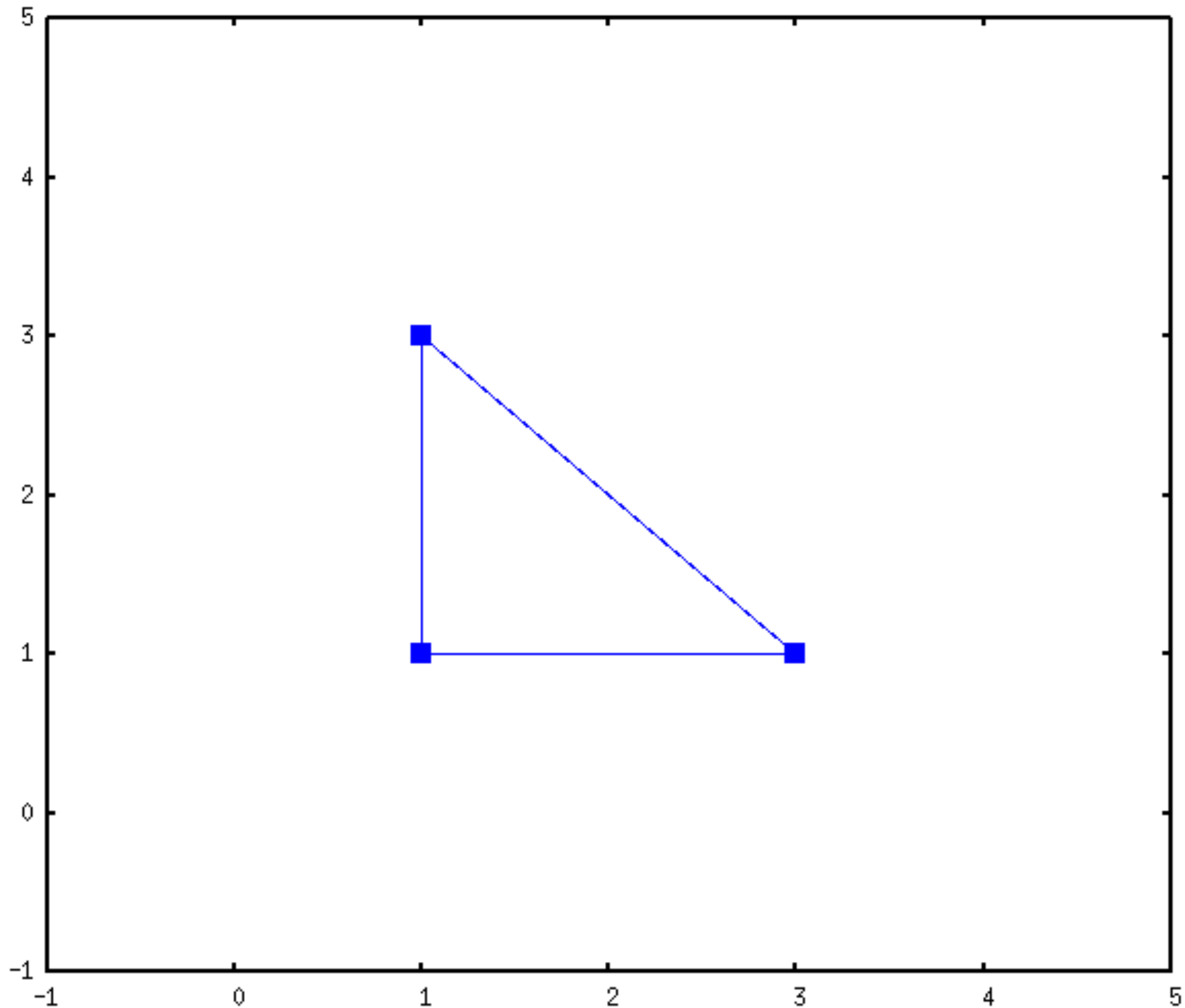
$$P'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Traslación

$$P'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Traslación



Ejercicio: Rotación

- Ahora se aplica al resultado anterior la rotación en -90° :

$$\begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

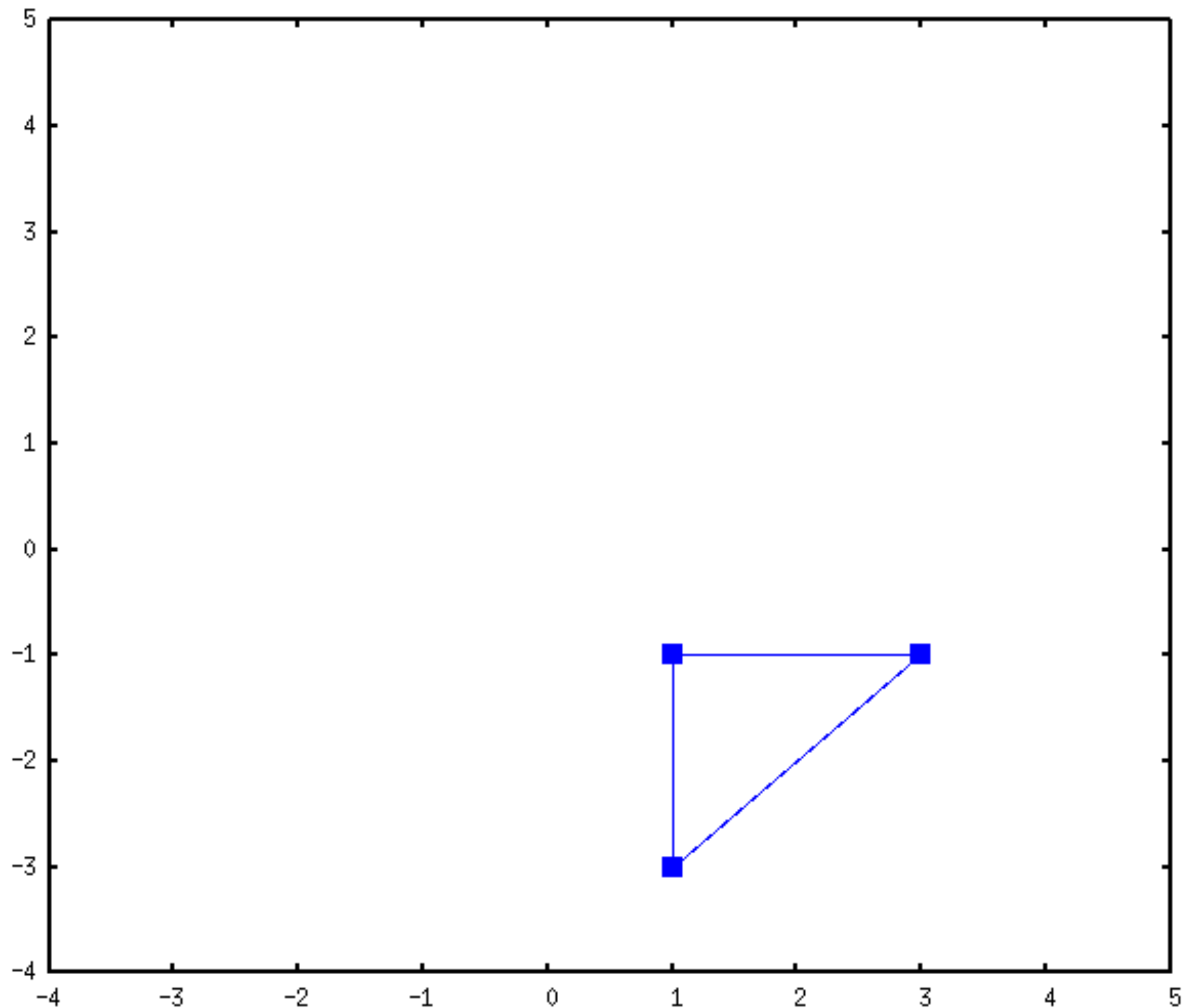
$$P_1'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Rotación

$$P_2'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Rotación



Ejercicio: Escala

- Finalmente aplicando la escala al doble se tiene:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

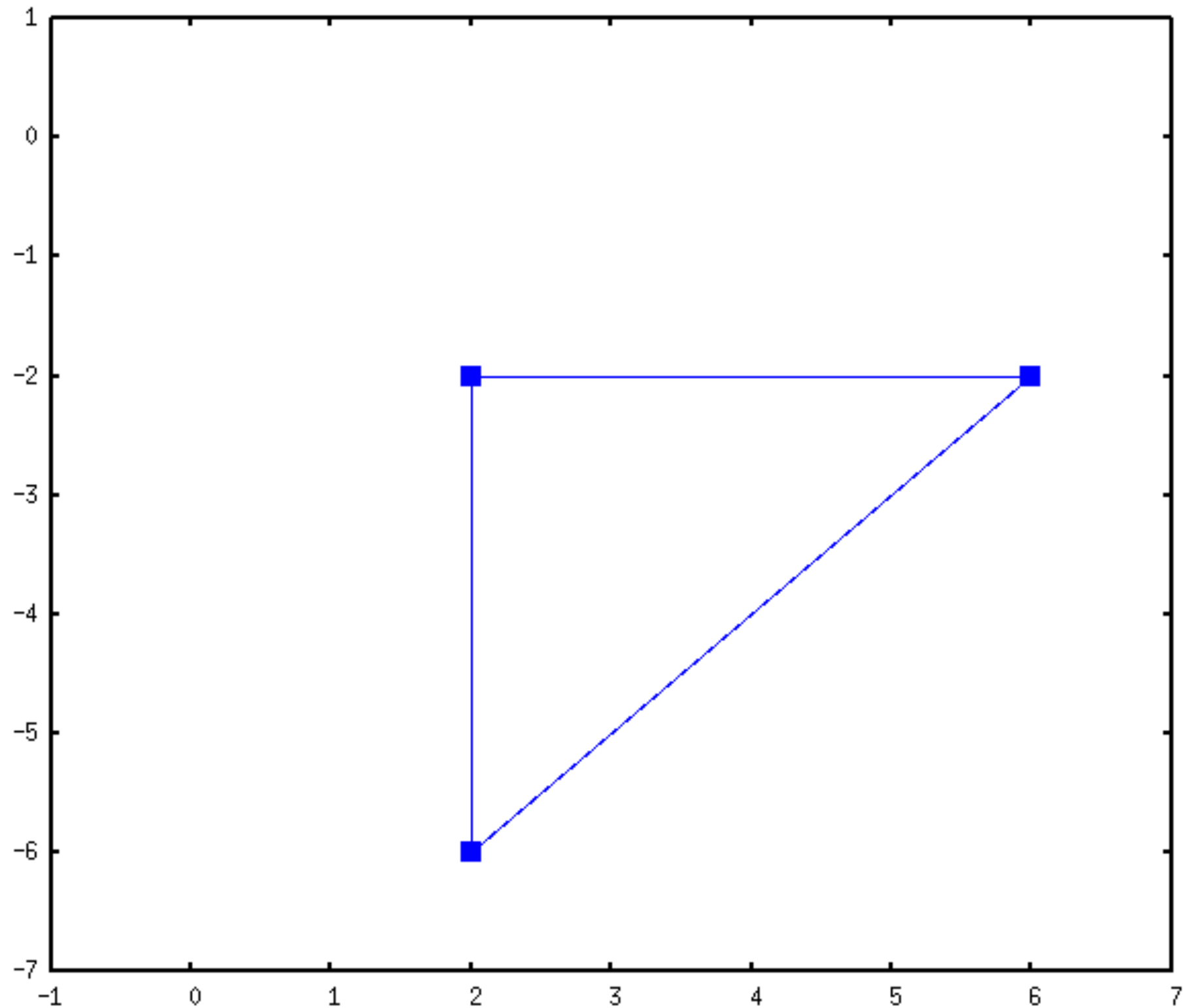
$$P_1''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Escala

$$P_2''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

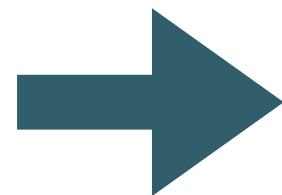
Ejercicio: Escala



Ejercicio: Composición

- De igual manera que en el ejemplo anterior, se verificarán ahora las operaciones anteriores realizando la composición de matrices.

$$C = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} S_x \cos(x) & -S_x \sin(x) & S_x(T_x \cos(x) - T_y \sin(x)) \\ S_y \sin(x) & S_y \cos(x) & S_y(T_x \sin(x) - T_y \cos(x)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Composición

$$P'_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio: Composición

